OPCIÓN A

1. *(3 puntos)*

a) ***(2 puntos)*** Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones, según los distintos valores de la constante real λ:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ \lambda x+z=0 \\ x+(1+\lambda)y+\lambda z=\lambda+1 \end{cases}$$

b) ***(1 punto)*** Halle la solución, si es posible, cuando $\lambda = 1$

.

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & \lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1-\lambda^2 & 1+\lambda & 0 \end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1-\lambda^2 & 1+\lambda \end{vmatrix}=-\left[-(1+\lambda)-(1-\lambda^2)\right]=1+\lambda+1-\lambda^2$$

$$|A|=2+\lambda-\lambda^2 \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow 2+\lambda-\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda^2-\lambda-2=0 \Rightarrow \Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)=1+8=9\geq0 \Rightarrow$$

$$\lambda=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2\cdot1} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=\dfrac{1+3}{2}=2 \\ \lambda=\dfrac{1-3}{2}=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall\lambda\in\Re-\{-1\,,2\} \Rightarrow |A|\neq0 \Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Si\ \lambda=-1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A)=rang\ (A/B)=2<Número\ de\ incognitas \Rightarrow$$

$$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$$Si\ \lambda=2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A)=rang\ (A/B)=2<Número\ de\ incognitas \Rightarrow$$

$$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$b)$

$$Si\ \lambda=1 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow -2z=0 \Rightarrow z=0 \Rightarrow y+0=1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow -x+1=1 \Rightarrow x=0$$

$$x=-1 \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\,,y\,,z)=(0\,,1\,,0)$$

2. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)* Determine la posición de las rectas siguientes: $r:\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases} \quad s:\begin{cases} 2x-y=0 \\ 3y-2z=0 \end{cases}$

b) *(1 punto)* Determine la distancia del punto **P(0 , 0 , 0)** a cada una de las rectas anteriores.

a)
De la recta "r" tomamos un punto A y un vector director **u**, de la recta "s" tomamos un punto B y un vector director **v**, luego formamos el vector **AB**.

Sabemos que si **u** ≠ α**v**, las rectas se cortan o se cruzan (coordenadas no proporcionales):
- (a) Si det(**u**, **v, AB**) ≠ 0, las rectas se cruzan
- (b) Si det(**u**, **v, AB**) = 0, las rectas se cortan en un punto.

De "r" un punto es A(1,1,0) y un vector director es **u** = (1,1,1).
De "s" tenemos y = 2x y z = 3y/2. Tomando x = μ, resulta la recta "s" como sigue s ≡ (x,y,z) = (μ, 2μ, 3μ).
Un punto de "s" es el B(0,0,0) y un vector director es el **v** = (1,2,3).

Como los vectores **u** y **v** no son proporcionales (1/1 ≠ 1/2), las rectas se cortan o se cruzan.

Como det(**u**, **v, BA**) = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{C_2-C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera fila $= +1\cdot(0-1) = -1 \neq 0$, las rectas se cruzan.

b) Lo haremos por dos procedimientos diferentes, uno para cada recta

Para la recta r.- Hallado un plano π que contiene el punto **P** y cuyo vector director es el de la recta, y sabiendo que el vector **PG**, en donde **G** es el punto genérico del plano, es perpendicular es perpendicular al director y su producto escalar nulo que es la ecuación buscada del plano.
Se halla el punto **Q** intersección de la recta **r** y el plano hallado; el módulo del vector **PQ** es la distancia pedida.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1,1,1) \\ \overrightarrow{PG}=(x,y,z)-(0,0,0)=(x,y,z) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PG}\perp\overrightarrow{v_r} \Rightarrow \overrightarrow{PG}\cdot\overrightarrow{v_r}=0 \Rightarrow (x,y,z)\cdot(1,1,1)=0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv x+y+z=0 \Rightarrow Punto\ Q\ de\ intersección \Rightarrow 1+t+1+t+t=0 \Rightarrow 3t+2=0 \Rightarrow 3t=-2 \Rightarrow t=-\frac{2}{3}$$

$$Q\begin{cases} x=1+\left(-\frac{2}{3}\right) \\ y=1+\left(-\frac{2}{3}\right) \\ z=-\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{PQ}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)-(0,0,0)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right) \Rightarrow$$

$$d(P,r)=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{6}{9}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\,u$$

Para la recta s.-

El punto **P** pertenece a la recta **s**, por tanto **d(P,s) = 0.**

3. *(4 puntos)*

a) *(3 puntos)* Considere la función de variable real : $f(x) = x\,[\ln(x)]^2$ **.**

a.1) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de la función $f(x)$**.**

a.2) *(1,5 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de esa función.

a.3) *(1 punto)* Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos y, en ese caso, calcule el valor de f(x) en cada uno de ellos.

b) *(1 punto)* Determine el valor de la constante **k** para que se verifique:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+kx-7}-\sqrt{x^2-2x+5}\right)=\frac{5}{3}$$

$a.1)$

$$\begin{cases} x\in\forall\Re \\ [\ln(x)]^2>0\Rightarrow\ln(x)\Rightarrow x\in\forall\Re/x>0 \end{cases}\Rightarrow Dom(f)=x\in\forall\Re/x>0$$

$a.2)$

$$f'(x)=[\ln(x)]^2+2x\ln(x)\cdot\frac{1}{x}=[\ln(x)]^2+2\ln(x)=[\ln(x)+2]\cdot\ln(x)\Rightarrow$$

$$Crecimiento\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow[\ln(x)+2]\cdot\ln(x)>0\Rightarrow\begin{cases}\ln(x)>0\Rightarrow x>e^0\Rightarrow x>1\\ \ln(x)+2>0\Rightarrow\ln(x)>-2\Rightarrow x>e^{-2}\Rightarrow x>\dfrac{1}{e^2}\end{cases}$$

	0	$\frac{1}{e^2}$	**1**	**∞**
x > 1	**(-)**	**(-)**	**(+)**	
$x>\frac{1}{e^2}$	**(-)**	**(+)**	**(+)**	
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**	

Crecimiento $\forall x\in\Re/\left(0<x<\frac{1}{e^2}\right)\cup(x>1)$ **Decrecimiento** $\forall x\in\Re/\frac{1}{e^2}<x<1$

a.3)

Máximo relativo en

$$x=\frac{1}{e^2}\Rightarrow f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{1}{e^2}\cdot\left[\ln\left(e^{-2}\right)\right]^2=\frac{1}{e^2}\cdot[(-2)\cdot\ln e]^2=\frac{1}{e^2}\cdot[(-2)\cdot1]^2=\frac{(-2)^2}{e^2}=\frac{4}{e^2}$$

De crecimiento pasa a decrecimiento

Mínimo relativo en $x=1\Rightarrow f(1)=1\cdot[\ln(1)]^2=1\cdot(0)^2=0$ **De decrecimiento pasa a crecimiento**

$b)$

$$L=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+kx-7}-\sqrt{x^2-2x+5}\right)\Rightarrow L=\frac{5}{3}$$

$$L=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+kx-7}-\sqrt{x^2-2x+5}\right)=\infty-\infty=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+kx-7}-\sqrt{x^2-2x+5}\right)\left(\sqrt{x^2+kx-7}-\sqrt{x^2-2x+5}\right)}{\sqrt{x^2+kx-7}+\sqrt{x^2-2x+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+kx-7-\left(x^2-2x+5\right)}{\sqrt{x^2+kx-7}+\sqrt{x^2-2x+5}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+kx-7-x^2+2x-5}{\sqrt{x^2+kx-7}+\sqrt{x^2-2x+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(k+2)\,x-12}{\sqrt{x^2+kx-7}+\sqrt{x^2-2x+5}}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(k+2)\,x-12}{\sqrt{x^2+kx-7}+\sqrt{x^2-2x+5}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{(k+2)\,x}{x}-\frac{12}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+kx-7}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2-2x+5}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(k+2)-\frac{12}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{kx}{x^2}-\frac{7}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(k+2)-\frac{12}{x}}{\sqrt{1+\frac{k}{x}-\frac{7}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}}=$$

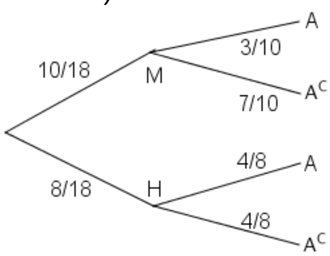
$$=\frac{(k+2)-0}{\sqrt{1+0-0}+\sqrt{1-0+0}}=\frac{(k+2)}{2}\Rightarrow\frac{(k+2)}{2}=\frac{5}{3}\Rightarrow 3k+6=10\Rightarrow 3k=4\Rightarrow k=\frac{4}{3}$$

4.- (1 punto) En una clase de bachillerato hay 10 chicas y 8 chicos. De ellos 3 chicas y 4 chicos juegan al ajedrez. Si escogemos un estudiante al azar, determine las siguientes probabilidades:
(0,5 puntos) a) Sea chica y no juegue al ajedrez.
(0,5 puntos) b) No juegue al ajedrez sabiendo que es chico.

a)
Sea chica y no juegue al ajedrez.
Llamemos M, H, A y A^C, a los sucesos siguientes, “ser chica”, "ser chico", "jugar al ajedrez" y "no jugar al ajedrez", respectivamente.

Datos del problema p(M) = 10/18 (hay 10 chicas), p(H) = 8/18 (hay 8 chicos), p(A/M) = 3/10 (3 chicas juegan al ajedrez) ; p(A/H) = 4/8 (3 chicas juegan al ajedrez), ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Me piden **p(chica y no juegue al ajedrez) = p(M$\cap$A^C) =** p(M).p(A^C/M) = (10/18)·(7/10) **= 7/18 $\cong$ 0’388889**.

Continuación del Problema 4 de la opción A
b)
No juegue al ajedrez sabiendo que es chico.

Me piden **p(no juegue al ajedrez, sabiendo que es chico) = p(A^C/H) =**

$$=\frac{p\left(A^C\cap H\right)}{p(H)}=\frac{p\left(H\cap A^C\right)}{p(H)}=\frac{p(H).p\left(A^C/H\right)}{p(H)}$$ **= p(A^C/H) = 4/8 = 0’5**.

Este problema es más sencillo realizarlo por una tabla de contingencia.

Este problema es muy fácil de realizar utilizando una **tabla de contingencia** (tabla de doble entrada), y después utilizando la definición de probabilidad de Laplace (número de casos favorables partido por número de casos posibles).

	A	A^C	Total
M	3		10
H	4		8
Total			18

Completamos la tabla de contingencia sabiendo que tanto la suma en horizontal como en vertical dan los totales. He puesto en negrita los números que he completado.

	A	A^C	Total
M	3	**7**	10
H	4	**4**	8
Total	**7**	**11**	18

a)
Sea chica y no juegue al ajedrez.

$$\mathbf{p(M \cap A^C)} = \frac{\text{Total chicas que no juegan al ajedrez}}{\text{Total chicos y chicas}} \mathbf{= 7/18 \cong 0'388889}.$$

b)
No juegue al ajedrez sabiendo que es chico.

$$\mathbf{p(A^C/H) =} \frac{\text{Total chicos que no juegan al ajedrez}}{\text{Total de chicos}} \mathbf{= 4/8 = 0'5.}$$

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)*

Sea **A** una matriz de dimensión 3 x 3 y denotamos por $|A|$ el determinante de la matriz

a.1) *(1 punto)* Considere la matriz **B** = $\left(\frac{1}{2}\right)$**A**. Si $|B|$ **= 1**, calcule el determinante de **A** es decir $|A|$

a.2) *(1 punto)* Si $A=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x-1 & 2 & 0 \\ 2 & x-1 & 2 \end{pmatrix}$. Determine los valores de x para los que se cumple que $|B|$ **= 1**, siendo **B** = $\left(\frac{1}{2}\right)$**A**.

b) *(1 punto)* Determine las matrices cuadradas de dimensión 2×2 de la forma $M=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ que verifiquen que $MM^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ en donde M^t es la matriz traspuesta de **M**

$a.1)$

$$A=2B\Rightarrow |A|=|2B|\Rightarrow |A|=2^3\cdot|B|=8\cdot 1=8$$

$a.2)$

$$|A|=8\Rightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x-1 & 2 & 0 \\ 2 & x-1 & 2 \end{vmatrix}=8\Rightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x-1 & 2 & 0 \\ 2-2x & x-3 & 0 \end{vmatrix}=8\Rightarrow 1\cdot\begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ 2-2x & x-3 \end{vmatrix}=8\Rightarrow$$

$$(x-1)\cdot(x-3)-2\cdot(2-2x)=8\Rightarrow x^2-3x-x+3-4+4x=8\Rightarrow x^2-1=8\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=\pm 3$$

$b)$

$$\begin{cases} M=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \\ M^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} \end{cases}\Rightarrow MM^t=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1+x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1+x^2=1\Rightarrow x^2=0\Rightarrow x=0 \\ xy=0\Rightarrow\begin{cases} Si\ x=0\Rightarrow y\in\Re \\ y=0\Rightarrow x\in\Re \end{cases} \\ y^2=4\Rightarrow y=\pm\sqrt{4}\Rightarrow\begin{cases} y=2 \\ y=-2 \end{cases} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ y=\begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases} \end{cases} Solución\Rightarrow\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

2. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)* Sea **m** una constante real. Determine la posición relativa de los planos siguientes según los valores de **m** π : mx - 6y + 2z = 2 π' : $\begin{cases} x=\lambda+\mu \\ y=1-\lambda \\ z=2-2\lambda+\mu \end{cases}$

b) *(1 punto)* Determine el ángulo, que forman las rectas. r : $\begin{cases} x+z=1 \\ y=0 \end{cases}$ s : $\begin{cases} 2x-4y-2z=0 \\ x+y+3z=-1 \end{cases}$

a) Los planos pueden ser paralelos, y entonces sus vectores directores son iguales o proporcionales, y de no serlo se cortarán según una recta.

Para hallar el vector director de π' hallaremos el producto vectorial de los vectores que lo generan

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (m\,,-6\,,2) \\ \begin{cases} \overrightarrow{v_{G1}} = (1,-1,-2) \\ \overrightarrow{v_{G2}} = (1,0\,,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi'}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} - \vec{j} = -\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi'}} = (-1,-3\,,1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (m\,,-6\,,2) \\ \left\{\overrightarrow{v_{\pi'}} = (1,3\,,-1)\right. \end{cases} \Rightarrow \frac{m}{1} = \frac{-6}{3} = \frac{2}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m}{1} = \frac{-6}{3} \Rightarrow 3m = -6 \Rightarrow m = -\frac{6}{3} = -2 \\ \frac{m}{1} = \frac{2}{-1} \Rightarrow -m = 2 \Rightarrow m = -2 \qquad \Rightarrow \\ \frac{-6}{3} = \frac{2}{-1} \end{cases}$$

$\forall m \in \Re - \{-2\} \Rightarrow$ Los vectores directores no son proporcionales $\Rightarrow$ π y π' son secantes

Si m = -2 $\Rightarrow$ Los vectores directores son proporcionales $\Rightarrow$ π y π' son paralelos.

Tenemos A(0,1,2)$\in$ π', pero como 0 - 6(1) + 2(2) $\neq$ 2, A(0,1,2)$\notin$ π, luego π y π' son paralelos y distintos.

b)

El <u>*ángulo que forman dos rectas*</u> <u>es el menor de los ángulos que forman sus vectores de dirección con un origen común</u>, es decir cos(<r,s>) = |cos(<**u**,**v**>)|, para lo cual tomamos el valor absoluto del coseno y nos aseguramos de que el ángulo es el menor y no supera lo 90º sexagesimales. <u>Si las rectas se cruzan es lo mismo pues es el menor de los ángulos que forman sus vectores directores.</u>

cos(α) = cos(<r,s>) = |cos(<**u**,**v**>)| = $\left| \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \right|$, de donde α = arcos$\left(\left| \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \right| \right)$

Siendo α el ángulo que forman los vectores directores de ambas rectas

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1) - \vec{j}(0) + \vec{k}(1) \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (-1,0\,,1) \\ \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(-10) - \vec{j}(8) + \vec{k}(6) \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (-10\,,-8\,,6) \approx (-5\,,-4\,,3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}|}{|\overrightarrow{v_r}| \cdot |\overrightarrow{v_s}|} = \frac{|(-1,0\,,1) \cdot (-5\,,-4\,,\ 3)|}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2 + 3^2}} = \frac{|5+3|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{50}} = \frac{|8|}{\sqrt{100}} = \frac{8}{10} \Rightarrow$$

$$\alpha = arc\,\cos\left(\frac{4}{5}\right) = 36^{o}\,52'11''$$

3. *(4 puntos)*

a) *(2 puntos)* Encuentre dos números tales que el doble del primero más el triple del segundo sea 24 y su producto sea máximo

b) *(2 puntos)* Determine el límite: $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x+1}{1 + sen\ x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

a) Siendo A el primer número y B el segundo

$$\begin{cases} 2A+3B=24 \Rightarrow 2A=24-3B \Rightarrow A=12-\frac{3}{2}B=\frac{24-3B}{2} \\ P=AB \end{cases} \Rightarrow P=\left(\frac{24-3B}{2}\right)\cdot B=\frac{1}{2}\left(24B-3B^2\right)$$

$$P=\left(\frac{24-3B}{2}\right)\cdot B=\frac{3}{2}\left(8B-B^2\right)\Rightarrow P'=\frac{dP}{dB}=\frac{3}{2}(8-2B)=3\cdot(4-B)\Rightarrow P'=0\Rightarrow 3\cdot(4-B)=0\Rightarrow$$

$$4-B=0\Rightarrow B=4\Rightarrow P'=\frac{d^2P}{dB^2}=\frac{3}{2}(-2)=-3<0\Rightarrow Máximo\Rightarrow\begin{cases} B=4 \\ A=\frac{24-3\cdot 4}{2}=6 \end{cases}$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{1+sen\ x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left(\frac{0+1}{1+sen\ 0}\right)^{\frac{1}{0^2}}=\left(\frac{1}{1+0}\right)^{\frac{1}{0}}=1^{\infty}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{1+sen\ x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{x+1}{1+sen\ x}-1\right)}$$

$$Sea\ L=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{x+1}{1+sen\ x}-1\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1-1-sen(x)}{x^2\cdot(1+sen(x))}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-sen(x)}{x^2\cdot(1+sen(x))}\right)=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{2x\cdot(1+sen(x))+x^2\cdot(\cos(x))}\right)=\frac{1-\cos(0)}{0+0}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)}{2\cdot(1+sen(x))+2x\cdot(\cos(x))+2x\cdot(\cos(x))+x^2\cdot(-sen(x))}\right)=\frac{sen(0)}{2\cdot(1+0)+0+0+0}=\frac{0}{2}=0$$

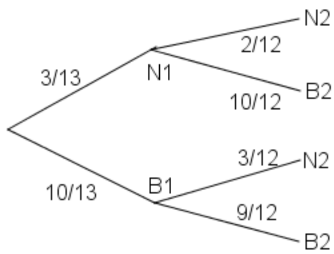
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{1+sen\ x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{x+1}{1+sen\ x}-1\right)}=e^0=1.$$

4.- (1 punto) En una urna hay 10 bolas blancas y 3 negras. Se extrae una bola al azar y, sin verla ni reemplazarla, se extrae una segunda bola.
(0,5 puntos) a) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra?
(0,5 puntos)b) Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, calcule la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra también.
a)
¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra?

Llamemos N1, N2, B1 y B2, a los sucesos siguientes, “primera bola extraída es negra”, "segunda bola extraída es negra", "primera bola extraída es blanca " y "segunda bola extraída es blanca ", respectivamente.

Datos del problema p(N1) = 3/13 (hay 3 negras), p(N2) = 2/12 (no se devuelve), p(B1) = 10/13 (hay 10 blancas) ; p(B2) = 9/12 (no se devuelve), ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Por el teorema de la Probabilidad Total:

p(N2) = p(N1).p(N2/N1) + p(B1).p(N2/B1) = (3/13)·(2/12) + (10/13)·(3/12) **= 3/13 ≅ 0’230769**.

b)
Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, calcule la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra también.

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

p(N1/N2) = $\frac{p(N1\cap N2)}{p(N2)}=\frac{p(N1).p(N2/N1)}{p(N2)}=\frac{(3/13)\cdot(2/12)}{3/13}$ **= 2/12 = 1/6 ≅ 0’166667**.